УДК 371.3:51
DOI: 10.32342/2522-4115-2021-1-21-19

І.М. КОЗИРЄВА,
старший викладач кафедри глобальної економіки
Університету імені Альфреда Нобеля (м. Дніпро)

СТОХАСТИЧНІ ЗАДАЧІ І ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

У статті розглянуто деякі аспекти вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» студентами економічних спеціальностей через розв’язування прикладних задач. Головною метою її вивчення є формування навичок застосування здобутих знань у завданнях з економіки. Концепція навчання теорії ймовірностей і математичної статистики уособлює процес, у якому стохастичні поняття та ідеї є математичним апаратом для розв’язання конкретних проблем. Традиційним наразі є ознайомлення студентів з окремими розділами прикладної математики, в тому числі з теорією ймовірностей і математичною статистикою як суто абстрактними теоріями. Однак найкращим вважаємо інший підхід, згідно з яким «найзначущішим з точки зору застосування математики є ознайомлення студента з методами побудови математичних моделей». У ході виконання завдань прикладного характеру студенти отримують уявлення про необхідність і універсальність математики та її методів.

Цінність стохастичних задач визначається не так тим апаратом, який використовується при їх розв’язанні, як можливостями продемонструвати процес застосування математики для виконання позаматематичних завдань. У статті показано, як за допомогою прикладних задач ознайомити студентів з реальними прикладами застосування стохастичних ідей і методів, а також уможливити організацію специфічної діяльності, необхідної в процесі застосування математики. Студент, досліджуючи математичну проблему, формує різні питання і завдання, потім «переводить» їх на мову математики, для того, щоб розв’язати їх математичними методами, а потім адаптувати рішення до реальної проблеми, яку поставлено спочатку. Цей процес являє собою процес побудови математичної (ймовірнісної) моделі реальної ситуації, який можна вважати математичною діяльністю у широкому сенсі.

Серед традиційних стохастичних задач є безліч таких типово математичних (внутрішньомодельних), які сформульовано за допомогою позаматематичних термінів.

Реальні завдання прикладного характеру в математиці зустрічаються рідко, оскільки етап формалізації (побудови математичної моделі позаматематичної ситуації) вимагає великих знань і математичної культури. Тому виникла проблема добору завдань прикладного характеру, які можуть використовуватися в навчанні.

У статті наведено ряд прикладів, де студентам продемонстровано, як за допомогою деякої модифікації, цілий ряд традиційних задач теорії ймовірностей (сформульованих мовою позаматематичних термінів), зробити завданнями прикладного характеру. Розширення кола таких завдань під час вивчення математики позитивно вплинуло б на ставлення студентів до цієї дисципліни, підвищилася б мотивація до навчання. Участь стохастичної проблематики в математичній і загальній освіті стала б більш багатоаспектною.

Для викладачів математики Університету, які працюють зі студентами економічних спеціальностей, найважливішим є формування у студентів математичних навичок застосовувати математичний апарат у подальшій професійній діяльності.

Ключові слова: стохастика, математична модель, ймовірність, позаматематичні терміни, прикладні задачі.

Постановка проблеми. Сучасні вимоги до математичної підготовки здобувачів вищої освіти значно підвищують роль формування у студентів здатності до самостійного засвоєння знань, а також застосування здобутих знань до розв’язання завдань професійного спрямування. Це вимагає від викладача пошуку і розроблення нових практичних матеріалів, спрямованих на розв'язання професійно орієнтованих задач для будь-якої спеціальності. Актуальним є питання формування у студентів загальних, математичних та професійних компетентностей засобами математики, тобто застосування математичного апарату, що вивчається в цій дисципліні до розв'язання прикладних задач. При вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики студент, досліджуючи математичну проблему, повинен формувати різні питання і завдання, потім «переводити» їх на мову математики, для того, щоб розв'язати їх математичними методами, а потім проінтерпретувати рішення з урахуванням реальної проблеми, яка поставлена спочатку. На прикладі розв'язання стохастичних задач студентами різних спеціальностей розглянемо прикладну спрямованість використання набутих знань та вмінь.

Аналіз останніх досліджень. Мета навчання стохастики була сформульована ще Б.В. Гнєденко і полягає в ідейному збагаченні курсу математики і підсиленні його розвиваючого і прикладного потенціалу, формуванні стохастичного мислення. Він писав, що «необхідно так будувати навчання, щоб студент постійно відчував, що, вивчаючи математику, він наближається до більш глибокого розуміння своєї спеціальності». Окремим аспектам проблеми навчання здобувачів елементів стохастики та розвитку ймовірнісно-статистичного мислення присвятили праці математики, психологи, дидакти та методисти, зокрема, Г.П. Бевз, М.І. Бурда, М.Я. Ігнатенко, Ю.М. Колягін, З.І. Слєпкань, В.В. Фірсов та ін. Важлива педагогічно-методична проблема – наповнення навчального змісту, його добору знайшла своє відображення у працях і зарубіжних учених-педагогів: З. Криговської, А. Плоцьки, В. Шленка. Зофія Криговська писала: «Учень створює концепцію математики, яка показується йому крізь призму завдань, які він вирішує». Ця стаття – це спроба обґрунтувати ефективність використання прикладних задач як одного із засобів розвитку ймовірнісного мислення студентів.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Аналіз досліджень з питань пошуку шляхів реалізації стохастичної складової в курсі математики, що існують на сьогодні, показав, що в основному потрібно посилювати прикладну та практичну спрямованості вивчення стохастики в курсі вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики.

Виклад основного матеріалу.

Прикладна математика і процес застосування математики

В цей час ведуться суперечки про те, чи є побудова математичної моделі позаматематичної ситуації математичною діяльністю, якої необхідно навчати на заняттях з математики. Ті, хто негативно відповідає на це питання, пропонують знайомити студентів з окремими розділами прикладної математики, в тому числі з теорією ймовірностей і математичною статистикою як із суто абстрактними теоріями. Однак існує підхід, згідно з яким «найістотнішим з точки зору застосування математики є знайомство студента з методами побудови математичних моделей» [1].

Прикладна спрямованість у навчанні стохастики

При виконанні завдань прикладного характеру студенти отримують уявлення про необхідність і універсальність математики та її методів [1]. Завданням прикладного характеру будемо називати задачу, яка виникла у позаматематичній ситуації і розв'язання якої здійснюється в три етапи: формалізація (побудова математичної моделі), розв'язання внутрішньомодельної математичної задачі й інтерпретація отриманого рішення.

Цінність стохастичних задач визначається не стільки тим апаратом, який використовується при їх розв'язанні, скільки можливостями продемонструвати процес застосування математики для виконання позаматематичних завдань. Ці завдання повинні знайомити студентів з реальним застосуванням стохастичних ідей і методів, а також слугувати для організації специфічної діяльності, необхідної в процесі застосування математики.

Концепція навчання теорії ймовірностей і математичної статистики [2, 3] трактує це навчання як процес, при якому стохастичні поняття й ідеї слугують математичним апаратом для розв'язання конкретних проблем. При цьому студент, досліджуючи математичну проблему, формує різні питання і завдання, потім «перекладає» їх на мову математики, для того, щоб розв'язати їх математичними методами, а потім проінтерпретувати рішення з урахуванням реальної проблеми, яка поставлена спочатку. Цей процес являє собою процес побудови математичної (ймовірнісної) моделі реальної ситуації, який можна вважати математичною діяльністю, що широко розуміється.

Як приклад розглянемо ситуацію, у якій проводиться випадковий експеримент (підкидається декілька гральних кісток або монет, випадковим чином вибираються кулі з урни і т. д.) з кінцевою множиною можливих результатів (з кінцевим простором елементарних подій). Кожному студентові пропонуємо висловити припущення щодо можливого результату експерименту. Ті, чия здогадка підтвердилася, отримують бал. Раціональна участь у такій ситуації пов'язана із відповіддю на питання: чи є серед можливих результатів такий, на який варто «робити ставку»? По суті, потрібно відповісти на питання про те, чи всі результати випадкового експерименту є рівноймовірними. Якщо ні, то варто вибирати більш ймовірний результат. Тут позаматематична проблема вибору зводиться до побудови ймовірнісної моделі випадкового експерименту. Завдання звелося, по суті, до оцінювання розподілу ймовірностей на множині результатів випадкового експерименту [2]. У деяких роботах [3] наводяться приклади організації формалізації (побудови ймовірнісної моделі) за допомогою малюнка.

Розглянемо поширений серед молоді випадковий вибір *k* з *S* осіб за допомогою жереба (сірників) [2]. Питання про те, які шанси кожного з *S* осіб потрапити в число *k* обраних, необхідно перевести спочатку на мову математики. Позаматематична ситуація схематизується і формалізується. Набір з *S* сірників подається у вигляді урни, у якій *k* чорних куль (сірників без голівки) і $S-k$ білих (сірників з голівками). Витягування сірника ототожнюється з випадковим вибором кулі (без повернення) з цієї урни. Таким чином, побудована математична (імовірнісна) модель початкової ситуації. Внутрішньомодельне завдання зводиться до знаходження ймовірності витягнути чорну кулю на *j* кроці $(j = 1, 2, \ldots, S)$. Встановлюється, що ця ймовірність не залежить від *j*. Після чого знайдена властивість імовірнісної моделі інтерпретується з урахуванням початкового завдання. Отримуємо, що шанси потрапити в число обраних осіб не залежать від того, яка за рахунком особа тягнула сірник, тобто випадковий вибір за допомогою сірників справедливий. Вирішення цієї проблеми включали усі три етапи розв'язання прикладної задачі. Випадковий вибір за допомогою жереба – приклад задачі прикладного характеру.

Розглянемо наступні приклади.

З а д а ч а 1. Тест складається з 20 питань, до кожного з них пропонується 4 варіанти відповідей, тільки одна з яких правильна. Той, що складає іспит, вибирає правильні, на його думку, відповіді. Позитивну оцінку отримує той, хто вибрав не менше 14 правильних відповідей. Яка ймовірність отримати позитивну оцінку без підготовки, обираючи відповіді навмання?

Ця задача не є прикладною в сенсі даного нами визначення, хоча її зміст пов'язано з позаматематичною ситуацією. Якщо до неї додати запитання: «Наскільки достовірною є позитивна оцінка в такій ситуації»? – вона стала б прикладним завданням в повному розумінні слова.

З а д а ч а 2. Тест складається з *n* питань, до кожного з них пропонується *S* відповідей, причому тільки одна з них правильна. При якому числі *k* правильних вказаних відповідей варто поставити позитивну оцінку? Позаматематичну проблему в цьому завданні необхідно вирішити за допомогою математики. Припустимо, що той, хто здає іспит, нічого не знає і обирає відповіді навмання. Формалізуємо цю ситуацію. У побудованій математичній моделі число правильних відповідей, які надає той, хто іспитується, є випадковою величиною *Sn* за таким розподілом:

$$P(S_n = k) = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{S}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{S}\right)^{n-k}, \ k = 1, 2, \ldots, S. \quad (1)$$

Знайдемо найменше k_0, для якого $P(S_n \ge k_0) < 0{,}05$. Для такого k_0 подія $\{S_n \ge k_0\}$ дуже малоймовірна, практично неможлива, а подія $\{S_n \ge k_0 - 1\}$ такою не є. Вирішується чисто математична задача знаходження k_0. Таким чином, якщо студент обрав *k* правильних відповідей і $k \ge k_0$, то дуже малоймовірно, щоб він досяг цього випадковим чином, тобто йому просто пощастило. Якщо ж $k < k_0$, то він не заслуговує на позитивну оцінку. У цьому завданні за допомогою вірогідності було оцінено певний ризик.

У житті іноді необхідно оцінити, чи є певний факт закономірним або випадковим.

З а д а ч а 3. На останній сторінці журналу надруковано фотографії *n* відомих осіб (наприклад, кінозірок) і *n* фотографій цих же осіб в дитинстві. Читач повинен вгадати, де чия фотографія. Починаючи із скількох правильних припущень варто давати приз?

З а д а ч а 4. Майбутніх детективів добирають, серед іншого, і за допомогою такого тесту: їм дають *n* фотографій різних осіб і *n* зразків почерку. Необхідно визначити, який почерк у кожної з цих осіб. Починаючи з якої кількості правильних відповідей можна говорити про вміння виявити за почерком характерні риси особистості?

Позаматематичні проблеми, які поставлено в задачах 3 і 4, ми намагаємося вирішити за допомогою математики. Розглянемо урну з *n* кулями, занумерованими числами $1,2,...,n$. Гравець виймає по черзі кулі з урни (без повернень) і отримує стільки очок, скільки разів номер вийнятої кулі збігся з номером кроку, на якому її було вийнято. Число отриманих гравцем очок – це випадкова величина x_n, визначена на множині всіх перестановок безлічі $1,2,...,n$ (кожна перестановка відповідає послідовності випадкового вибору куль).

З а д а ч а 5. Позначимо A_k^n подію, що полягає в тому, що число отриманих у грі очок не менше *k*. Для якого найменшого *k* подія A_k^n стає практично неможливою?

Якщо під подією практично неможливою ми розумітимемо таку подію *A*, що $P(A) < 0{,}05$, то задачу 5 можна сформулювати таким чином.

З а д а ч а 6. Знайти найменше *k*, для якого $P(x_n \geq k) < 0{,}05$.

Повернемося до задач 3 і 4. Нехай гіпотеза *H* полягає в тому, що учасник вікторини або майбутній детектив встановлює відповідність випадковим чином, навмання. У випадку якщо *H* істинна, то число правильних відповідей у задачах 3 і 4 – це випадкова величина x_n, про яку йде мова в задачі 6. Таким чином, задача 6 виникла в результаті перекладу на математичну мову задач 3 і 4. Розв'язок задачі 6 відповідає рішенню внутрішньомодельних задач 3 і 4. Нехай k_0 задовольняє умовам задачі 6. Якщо число правильних відповідей *k* в задачах 3 і 4 таке, що $k \geq k_0$, то можна стверджувати, що гіпотеза *H* неправильна. Відповіді в задачах 3 і 4 давалися не навмання. Це інтерпретація розв'язку задачі 6 з урахуванням задач 3 і 4.

Задачі 3 і 4 ілюструють ідею перевірки деяких стохастичних гіпотез, це приклади завдань прикладного характеру.

Внутрішньомодельні задачі-схеми

Серед традиційних стохастичних задач багато таких типово математичних (внутрішньомодельних), які сформульовано за допомогою позаматематичних термінів. Як приклад розглянемо таку задачу.

З а д а ч а 7. Два баскетболісти кидають м'яч у кошик по три рази. Ймовірність попадання для них дорівнює 0,6 і 0,7 відповідно. Знайдіть ймовірність того, вони попадуть у кошик однакову кількість разів.

Таку задачу іноді називають близькою до життя, життєвою, оскільки її фабула пов'язана з дійсністю. Між тим задача зовсім не прикладна і дуже далека від реального життя. Порівняємо її з наступним завданням.

З а д а ч а 8. В урні I_1 6 чорних і 4 білі кулі, а в урні I_2 – 7 чорних і 3 білі. З кожної урни по три рази вибирається куля з поверненням. Знайдіть ймовірність того, що чорну кулю виберуть з урни I_1 стільки ж разів, скільки з урни I_2.

Задача 8 являє собою переформулювання задачі 7, при цьому заміна баскетболістів і кошиків на кулі і урни ніяк не впливає на методи розв'язання задачі. При аналізі задачі 7 виникає питання про те, хто і яким чином визначив, що «ймовірність попадання в кошик для цього баскетболіста дорівнює *p*». Неясно, хто формалізував реальну ситуацію, як він це зробив, чому отримав факт, який використовується в задачі.

З а д а ч а 9. Надійністю приладу називається ймовірність його безвідмовної роботи впродовж певного проміжку часу. Для збільшення надійності приладу він дублюється іншим таким же приладом так, що якщо один з них відмовляє, то другий тут же бере на себе усі його функції. Визначте надійність системи двох приладів, які дублюють один одного, якщо надійність кожного приладу рівна *p* і відмова одного з них не впливає на роботу іншого [4].

Для розв'язання задачі 9 немає необхідності формалізувати реальну ситуацію або інтерпретувати рішення. Необхідність інтерпретації виникає, якщо поставити питання про те, яке число приладів, що дублюють один одгого, необхідно для того, щоб прилад діяв впродовж деякого проміжку часу безвідмовно із заданою вірогідністю.

З а д а ч а 10. Для збільшення надійності прилад дублюється $(n-1)$ такими ж приладами, надійність кожного з яких дорівнює *p*. Знайдіть надійність цієї системи з *n* приладів, вважаючи, що відмова одного з приладів не позначається на роботі інших. Для якого найменшого *n* надійність системи буде більше, ніж 0,95? Що можна сказати про це число *n*, враховуючи інтереси практики?

Результат, отриманий при розв'язанні задачі 10, необхідно інтерпретувати[1]. Яким чином стало відомо, що надійність приладу дорівнює *p*? Етап формалізації відсутній в цих задачах. Задачі 9 і 10 є прикладами математичних задач, сформульованих за допомогою позаматематичних термінів. Задачу 10 в методиці математики відносять до так званих внутрішньомодельних задач-схем, які виникають в процесі розв'язання реальних задач після етапу формалізації, тобто перекладу їх на математичну мову.

Стохастичні ігри і прикладні задачі, їх використання в навчанні

Реальні задачі прикладного характеру в математиці зустрічаються рідко, оскільки етап формалізації (побудови математичної моделі позаматематичної ситуації) вимагає великих знань і математичної культури. Тому виникла проблема добору завдань прикладного характеру, які можуть використовуватися в навчанні. У методиці математики [1] прийнято пояснювати суть застосування математики для розв'язання практичних завдань на прикладах задач, у яких моделюється справжнє застосування математики. Для цього розглядається реальна ситуація, для якої ставляться спрощені задачі. Для спрощення зменшують число змінних, вводять додаткові припущення і т. д. Задача, що моделює справжнє застосування математики, є спрощеною, дещо схематично описує реальну ситуацію. Розв'язання такої задачі, подібно до рішення реальної прикладної задачі, охоплює три етапи. Як матеріал для дидактичного моделювання задач прикладного характеру можна використати стохастичні ігри. Участь у грі зазвичай пов'язана з питаннями ухвалення рішення, вибору оптимальної стратегії, перевірки гіпотез і т. д.

З а д а ч а 11. Хтось є власником кіоску, у якому торгує бутербродами (хотдогами). Булки він купує в пекарні за ціною *a* гривень за штуку. Після того, як з булок роблять бутерброди, їх продають в кіоску за ціною *b* гривень за штуку $(b>a)$. Ті булки, які не продали за день, здаються у булочну. Булочна робить з них сухарі, при цьому власникові кіоску платять *c* гривень за штуку $(c<a)$. Попит в кіоску в цей день є випадковою величиною *x* з розподілом P_x, де $P_x(j)=P(x=j)$. Скільки булок в день варто купувати в пекарні?

Ця задача викладена в підручнику [4], де зазначено, що

$$a=2,\ b=3,\ c=1,\ P_x(10)=P_x(20)=0{,}1;\ P_x(30)=P_x(40)=0{,}3;\ P_x(50)=0{,}2.$$

Якщо попит P_{δ} задано *a priopi*, то прибуток від продажу у тому випадку, якщо в пекарні куплено *n* булок, є випадковою величиною *Zn*. Завдання зводиться до знаходження *n*, при якому математичне очікування *Zn* максимальне. Задача 11 може виникнути тоді, коли власник кіоску тільки починає свою торгову діяльність.

Іншу реальну ситуацію можна моделювати, виходячи з потреб навчання.

З а д а ч а 12. Пропонується участь у такій грі. Спочатку можна купити будь-яке число жетонів по 2 гривні за штуку. Потім учасник кидає дві гральні кістки і рахує суму очок *j*, що випали. За *j* жетонів він отримує по 3 гривні за штуку, а за інші по 1 гривні. Скільки жетонів варто купити для участі в грі?

Розв'язання задачі 12 включає три етапи рішення задач прикладного характеру. Ця задача аналогічна задачі 11 з точки зору застосування математики. Реальна ситуація в ній моделюється.

Висновок

За допомогою деякої модифікації цілий ряд традиційних задач теорії ймовірностей, які сформульовані мовою позаматематичних термінів, могли б стати задачами прикладного характеру. Розширення кола таких завдань в навчанні математики позитивно вплину-

[1] При знайденому n з ймовірністю, близькою до 1, тобто майже напевно, система буде безвідмовно працювати, причому вартість купівлі буде мінімальною.

ло б на ставлення студентів до математики, підвищилася б мотивація до навчання. Участь стохастичної проблематики в математичній і загальній освіті стала б всебічною. Ці задачі:

а) сприяють засвоєнню не лише методів прикладної математики, але передусім методів і принципів опису реальних ситуацій математичною мовою;

б) вчать раціонально вибирати адекватний математичний апарат для розв'язання позаматематичних задач;

в) підводять до математичного «відкриття», виховуючи потребу в розширенні знань;

г) підвищують мотивацію введення імовірнісних понять і теорем, розвивають уявлення про ймовірносно-статистичні поняття і методи;

д) знайомлять студентів з методологією математики і особливим характером стохастичних висновків;

е) демонструють відмінності в характері двох світів – світу математики і реальних ситуацій – у яких проходять три етапи розв'язання прикладної задачі;

ж) дають можливість посилити міжпредметні зв'язки за допомогою застосування стохастичних методів у різних галузях знань і практики.

Висновки. Вивчення теорії ймовірності і математичної статистики має загальноосвітнє значення. Наповнення розділу стохастики прикладними задачами, що задовольняють основні дидактичні вимоги, сприятиме формуванню високого рівня практичних компетентностей здобувача, орієнтованих на всебічний розвиток його особистості.

Список використаної літератури

1. Криговська З. Нариси дидактики математики. Т.3. Варшава: Шкільне та педагогічне видавництво, 1980. 182 с.

2. Плоцьки А. Стохастика в математиці «Для всіх»: монографія. Краків: Наукове видавництво Вищого педагогічного училища, 1980. – 248 с.

3. Плоцьки А. Стохастичні терміни та ідеї як найважливіші інструменти математики – уроки по вирішенню конкретних завдань *Дидактика математики.* Білефельд: Університет Білефельд WS 88/89. 1990. С. 93–104.

4. Шленк В. Теорія ймовірностей для ліцеїв та технікумів. Варшава: Шкільне та педагогічне видавництво, 1999. – 151 с.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ЦУЛ, 2019. – 424 с.

6. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Посібник з розв'язуванням задач. – К.: ЦУЛ, 2019. – 576 с.

7. Кушлик-Дивульська О.І., Поліщук Н.В., Орел Б.П., Штабалюк П.І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.